

Apostila: Matrizes e Determinantes

Prof. André Luís Rossi de Oliveira

1 Matrizes

1.1 *Conceitos Básicos*

Chamamos de matriz a uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas.

Exemplos:

- (1) Considere a tabela abaixo:

	Altura (metros)	Peso (quilos)	Idade (anos)
Pessoa 1	1,70	70	23
Pessoa 2	1,75	60	45
Pessoa 3	1,60	52	25
Pessoa 4	1,81	72	30

Ao abstraírmos os significados das linhas e colunas, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1,70 & 70 & 23 \\ 1,75 & 60 & 45 \\ 1,60 & 52 & 25 \\ 1,81 & 72 & 30 \end{bmatrix}$$

- (2) Os elementos de uma matriz podem ser números, funções etc, como nas matrizes abaixo:

$$\begin{bmatrix} x^2 & 1 \\ \sqrt{x} & 2 \\ x+1 & 3 \end{bmatrix} \quad [5 \quad \text{sen } x \quad -2] \quad \begin{bmatrix} 0 \\ e^3 \\ 3x \end{bmatrix}$$

Representamos uma matriz de m linhas e n colunas por

$$A_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n},$$

onde a_{ij} é o elemento característico da matriz, com i representando a linha e j , a coluna.

Definição: Duas matrizes $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$ são iguais, ou seja, $A = B$, se elas têm o mesmo número de linhas ($m = r$) e colunas ($n = s$) e todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$).

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 2^2 & \ln 1 & \text{sen } 90^\circ \\ 3 & 0 & \sqrt{9} \\ \cos 90^\circ & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.2 Tipos Especiais de Matrizes

Seja $A_{m \times n}$ uma matriz com m linhas e n colunas. Alguns tipos importantes de matrizes são os seguintes:

- (a) Quadrada: É aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas ($m = n$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -9 \\ 4 & -8 & -7 \\ 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad [4]_{1 \times 1}$$

(b) Nula: $a_{ij} = 0 \forall i, j$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) Coluna: $n = 1$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Uma matriz coluna é chamada de vetor-coluna.

(d) Linha: $m = 1$.

$$[3 \quad -7 \quad -4] \quad [6 \quad 4 \quad 1 \quad -8]$$

Uma matriz linha é chamada de vetor-linha.

(e) Diagonal: É uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

(f) Identidade: É uma matriz diagonal onde todos os elementos da diagonal são iguais a 1, ou seja, $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (g) Triangular Superior: É uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0 \quad \forall i > j$.

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 & 9 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- (h) Triangular Inferior: É uma matriz quadrada onde todos os elementos acima da diagonal são iguais a zero, isto é, $a_{ij} = 0 \quad \forall i < j$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

- (i) Simétrica: É uma matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1.3 Operações com Matrizes

Adição: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$, onde $A_{m \times n} = [a_{ij}]$ e $B_{m \times n} = [b_{ij}]$.

$$\text{Exemplo: } \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -7 & 1 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -13 \\ -4 & -2 \\ 13 & -2 \end{bmatrix}$$

Propriedades da adição: Dadas as matrizes A , B e C de mesma ordem $m \times n$, temos:

- (i) $A + B = B + A$ (comutatividade)
- (ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)
- (iii) $A + 0 = A$, onde 0 é a matriz nula $m \times n$.

Demonstração: Exercício!

Multipliação por escalar: $k.A = [ka_{ij}]_{m \times n}$, onde $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k é um número real.

$$\text{Exemplo: } 7 \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -21 \\ 28 & 35 \end{bmatrix}$$

Propriedades: Dadas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$ e números reais k, k_1 e k_2 , temos:

- (i) $k(A + B) = kA + kB$
- (ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
- (iii) $0.A = 0$
- (iv) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$

Demonstração: Exercício!

Transposição: Dada uma matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, a matriz transposta de A é definida como

$$A^T = [b_{ij}]_{n \times m}, \text{ cujas linhas são as colunas de } A, \text{ isto é, } b_{ij} = a_{ji} \forall i, j.$$

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 0 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

- (i) Uma matriz é simétrica se, e somente se, ela é igual à sua transposta, ou seja, $A = A^T$.
- (ii) $(A^T)^T = A$
- (iii) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- (iv) $(kA)^T = kA^T$
- (v) $(AB)^T = B^T A^T$

Demonstração: Exercício!

Multiplicação de Matrizes: Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{rs}]_{n \times p}$. Definimos o produto matricial $AB = [c_{uv}]_{m \times p}$ por

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} b_{kv} = a_{u1} b_{1v} + \dots + a_{un} b_{nv}$$

Perceba que só é possível efetuar o produto de duas matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{l \times p}$ se $n = l$, ou seja, se o número de colunas da matriz que aparece pré-multiplicando for igual ao número de linhas da matriz que aparece pós-multiplicando.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(-1)+(5)(4) & (3)(0)+(5)(7) \\ (4)(-1)+(6)(4) & (4)(0)+(6)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 35 \\ 20 & 42 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(5)+(3)(9) \\ (2)(5)+(8)(9) \\ (4)(5)+(0)(9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 9 \\ -3 & 9 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad Ax = \begin{bmatrix} 2x_1 + 8x_2 + 9x_3 \\ -3x_1 + 9x_2 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

Propriedades:

(i) Em geral, $AB \neq BA$.

Exemplo: Se $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

É importante perceber que $AB = 0$ sem que $A = 0$ ou $B = 0$.

Desde que estejam bem definidas as operações, as seguintes propriedades são válidas:

(ii) $AI = IA = A$

(iii) $A(B+C) = AB+AC$

(iv) $(A+B)C = AC+BC$

(v) $(AB)C = A(BC)$

(vi) $(AB)^T = B^T A^T$

(vii) $0.A = 0$ e $A.0 = 0$

1.4 Matriz Inversa

Definição: Seja A uma matriz quadrada. A matriz inversa de A , denotada por A^{-1} , é aquela que satisfaz a condição $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

Obs.: (i) Nem toda matriz quadrada possui inversa. Se uma matriz quadrada possui inversa, ela é chamada de não-singular. Se ela não possui inversa, é chamada de singular.

(ii) Se existe a matriz inversa, então ela é única.

Exemplos: Se $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, então

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Podemos verificar facilmente que $BA = I$, de forma que $B = A^{-1}$ e $A = B^{-1}$.

Propriedades:

(i) $(A^{-1})^{-1} = A$

(ii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Demonstração: Seja C a inversa de AB . Então $CAB = I$, de forma que

$$CABB^{-1}A^{-1} = IB^{-1}A^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Mas também é verdade que

$$CABB^{-1}A^{-1} = CAIA^{-1} = CAA^{-1} = CI = C,$$

o que implica $C = B^{-1}A^{-1}$.

$$(iii) \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

1.5 Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

onde os a_{ij} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, são números reais.

Uma solução do sistema acima é uma lista de n números (n -upla) do tipo (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisfaça simultaneamente as m equações.

O sistema pode ser escrito na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad \text{ou } Ax = b,$$

onde A é a matriz dos coeficientes, x é o vetor das incógnitas e b é o vetor dos termos independentes.

Outra matriz importante é a matriz ampliada do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix}$$

Exemplo: Considere o sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ -x_1 + 7x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -3 \end{cases}$. A sua forma matricial é

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 7 & -1 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Operações Elementares

(i) Permuta da i -ésima e j -ésima linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$)

Exemplo: $L_1 \leftrightarrow L_2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) Multiplicação da i -ésima linha por um escalar (número real) não nulo k ($L_i \rightarrow kL_i$)

Exemplo: $L_3 \rightarrow -2L_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

(iii) Substituição da i -ésima linha pela i -ésima linha mais k vezes a j -ésima linha ($L_i \rightarrow L_i + kL_j$)

Exemplo: $L_2 \rightarrow L_2 + 3L_1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 10 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Se A e B são matrizes $m \times n$, dizemos que B é linha-equivalente a A se B pode ser obtida de A através de um número finito de operações elementares sobre as linhas de A . A notação para isso é $A \rightarrow B$ ou $A \sim B$.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, pois

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Teorema: Dois sistemas que possuem matrizes ampliadas equivalentes são equivalentes, ou seja, toda solução de um dos sistemas também é solução do outro.

Demonstração: Não será apresentada.

Forma Escada

Definição: Uma matriz $m \times n$ é linha-reduzida à forma escada se:

- (a) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1;
- (b) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;
- (c) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linha não nulas;
- (d) Se as linhas $1, \dots, r$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i , então $k_1 < k_2 < \dots < k_r$.

Exemplos:

(1) A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ não satisfaz as condições (b) e (c).

(2) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não satisfaz as condições (a), (b) e (d).

(3) A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ está na forma escada.

Teorema: Toda matriz $A_{m \times n}$ é linha-equivalente a uma única matriz linha-reduzida à forma escada.

Dem.: Não será apresentada.

Definição: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, seja $B_{m \times n}$ a matriz linha-reduzida à forma escada equivalente a A . O posto de A , denotado por p , é o número de linhas não nulas de B . A nulidade de A é igual ao número $n-p$.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Efetuamos as seguintes operações:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 4L_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{L_3}{8}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O posto de A é 3 e a nulidade é $4-3=1$.

Podemos interpretar a matriz A como sendo a matriz ampliada do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Pelo que foi demonstrado acima, esse sistema é equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{8} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \\ x_3 = \frac{11}{8} \end{cases}$$

Soluções de Sistemas de Equações Lineares

Considere o sistema formado de apenas uma equação e uma incógnita $ax = b$. Nesse caso, há três possibilidades:

- (i) $a \neq 0$: Existe uma única solução $x = \frac{b}{a}$.
- (ii): $a = 0$ e $b = 0$: Neste caso, o sistema torna-se $0x = 0$ e qualquer número real é uma solução.
- (iii) $a = 0$ e $b \neq 0$: Neste caso, o sistema torna-se $0x = b$ e não possui solução.

Analogamente, no caso de um sistema de m equações lineares e n incógnitas, há três casos possíveis: uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução. No primeiro caso, o sistema é dito possível (ou compatível) e determinado, no segundo, possível e indeterminado, e, no terceiro, impossível (ou incompatível).

O seguinte teorema traz alguns resultados sobre a existência de soluções.

Teorema:

- (i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz de coeficientes;
- (ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução é única.
- (iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto e $p < n$, podem ser escolhidas $n-p$ incógnitas, e as demais p incógnitas serão dadas em função destas.

Exemplos:

- (1) O sistema com matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ tem solução única, dada por

$x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = -2$, já que o posto da matriz de coeficientes (p_c) é igual ao da matriz ampliada (p_a), $p_c = p_a = 3$, e o número de incógnitas é igual ao posto.

- (2) Para o sistema com matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$, temos

$p_c = p_a = 2, m = 2, n = 3, p = 2$, de maneira que há infinitas soluções, dadas por

$$x_1 = -2 - 8x_3$$

$$x_2 = 5 + 2x_3$$

- (3) O sistema com matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é impossível, pois $p_c = 2, p_a = 3$.

- (4) Considere o sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$. A matriz ampliada do sistema pode ser transformada na forma escada através das seguintes operações.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos observar que $p_c = p_a = 2, m = 2, n = 4$, de forma que há 2 graus de liberdade. As variáveis x_3 e x_4 são livres. Se fizermos $x_3 = \lambda_1$ e $x_4 = \lambda_2$, obteremos as seguintes soluções do problema:

$$\begin{aligned}x_1 &= -5\lambda_1 + \lambda_2 \\x_2 &= 2\lambda_1 - \lambda_2 \\x_3 &= \lambda_1 \\x_4 &= \lambda_2\end{aligned}$$

2 Determinantes

2.1 *Definição e propriedades básicas*

Considere o sistema de apenas uma equação e uma incógnita $ax = b$, com $a \neq 0$. A solução desse sistema é $x = \frac{b}{a}$. O denominador a está associado à matriz de coeficientes do sistema, $[a]$.

Em um sistema 2×2 do tipo $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$, a solução é dada por

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \text{ e } x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

Perceba que os denominadores são iguais. Além disso, de maneira análoga ao caso de uma equação e uma incógnita, os denominadores estão associados à matriz de coeficientes do sistema, qual seja

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Em um sistema 3×3 , as soluções x_1, x_2 e x_3 são frações com denominadores iguais a

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

que também estão relacionados à matriz de coeficientes do sistema, dada por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Os denominadores mencionados acima são chamados de determinantes das matrizes de coeficientes.

Para podermos definir determinante, precisamos da noção de inversão, dada a seguir:

Definição: Dada uma permutação dos inteiros $1, 2, \dots, n$, existe uma inversão quando um inteiro precede outro menor do que ele.

Podemos agora definir o conceito de determinante.

Definição: O determinante de uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é definido como

$$\det A = \sum_{\rho} (-1)^J a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

onde $J = J(j_1, j_2, \dots, j_n)$ é o número de inversões da permutação (j_1, j_2, \dots, j_n) e ρ indica que a soma ocorre sobre todas as permutações de $(1, 2, \dots, n)$ (existem $n!$ permutações).

Podemos fazer as seguintes observações com relação a essa definição.

Obs.: (i) Em cada termo do somatório, existe um e apenas um elemento de cada linha e um, e apenas um, elemento de cada coluna da matriz;

(ii) O determinante também pode ser definido através da fórmula

$$\det A = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n},$$

Exemplos:

$$(1) \quad \det [a] = a$$

$$(2) \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(3) \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Propriedades:

- (1) Se todos os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz A são nulos, então $\det A = 0$.

Dem.: Segue-se imediatamente da observação (i).

- (2) $\det A = \det A^T$.

Dem.: Se $A = [a_{ij}]$, sabemos que $A^T = [b_{ij}]$, onde $b_{ij} = a_{ji}$. Sendo assim,

$$\det [b_{ij}] = \sum_{\rho} (-1)^J b_{1j_1} b_{2j_2} \dots b_{nj_n} \\ = \sum_{\rho} (-1)^J a_{j_1 1} a_{j_2 2} \dots a_{j_n n} \\ = \det [a_{ij}],$$

pela observação (ii).

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc.$

- (3) Se a linha de uma matriz é multiplicada por uma constante, o determinante fica multiplicado por esta constante.

Dem.: Segue-se imediatamente da observação (i).

Exemplo: $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad - bc) = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$

- (4) A troca da posição de duas linhas (ou colunas) altera o sinal do determinante, mas não o seu valor numérico.

Dem.: Quando duas linhas são trocadas, é alterada a paridade do número de inversões dos índices, o que significa que o sinal dos termos é trocado.

Exemplo: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - bc).$

(5) O determinante de uma matriz que tem duas linhas (ou colunas) iguais é zero.

Dem.: Quando as posições das linhas iguais são trocadas, o determinante troca de sinal, pela propriedade (4). Por outro lado, a matriz que resulta da troca de linhas (ou colunas) é a mesma de antes, o que significa que o determinante tem que ser o mesmo. Portanto, a única possibilidade é que o determinante seja nulo.

(6) Se uma linha (ou coluna) é um múltiplo de outra linha (ou coluna), então o valor do determinante é zero.

Dem.: Mesmo argumento utilizado acima, utilizando também a propriedade (3).

(7) O determinante não se altera se for somada a uma linha (ou coluna) outra linha (ou coluna) multiplicada por uma constante.

$$\text{Exemplo: } \begin{vmatrix} a & b \\ c+ka & d+kb \end{vmatrix} = a(d+kb) - b(c+ka) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

(8) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

2.2 Desenvolvimento de Laplace

O determinante de uma matriz A de dimensão 3×3 pode ser escrito como

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{23}a_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}|A_{11}| - a_{12}|A_{12}| + a_{13}|A_{13}|, \end{aligned}$$

onde A_{ij} é a submatriz da matriz inicial que resulta da retirada da i -ésima linha e da j -ésima coluna.

Defina agora $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$, chamado de o cofator do elemento a_{ij} . A fórmula do desenvolvimento de Laplace é a seguinte:

$$\det A_{n \times n} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta_{ij},$$

onde podemos observar que o determinante foi desenvolvido pela i -ésima linha. Uma fórmula análoga vale para o desenvolvimento a partir de uma determinada coluna.

Exemplos:

(1)

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\Delta_{12} + 1\Delta_{22} + (-1)\Delta_{32} = (-2)(-2) + (1)(8) + (-1)(7) = 5,$$

$$\text{onde } \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \text{ e } \Delta_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

(2)

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{(7)}{=} \begin{vmatrix} -5 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -3 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{C_1 \rightarrow C_1 - 2C_2}{=} 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ -5 & -3 & 0 \\ -8 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ & \stackrel{(3)}{=} (-2) \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 8 & -3 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{(7)}{=} (-2) \begin{vmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \\ 13 & 0 & -1 \end{vmatrix} \stackrel{L_1 \rightarrow L_1 + L_2}{=} (-2)(3)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} \\ & = (-6)(-10 - 52) = 372. \end{aligned}$$

2.3 Cálculo da matriz inversa

Definição: A matriz de cofatores de uma matriz $A_{n \times n}$ é definida como $\bar{A} = [\Delta_{ij}]$.

Exemplo: Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$. Então

$$\Delta_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19, \quad \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19, \quad \Delta_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -19,$$

e assim por diante, de maneira que

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

Definição: Dada uma matriz quadrada A , definimos a matriz adjunta de A como sendo a transposta da matriz dos cofatores de A .

Exemplo: Para a matriz A do exemplo anterior, temos

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Teorema: $A\bar{A}^T = A(\text{adj}A) = (\det A)I_n$.

Dem.: (Para $n = 3$)

Considere uma matriz A de dimensão 3×3 . Então

$$A(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = [c_{ij}],$$

onde

$$c_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} = \det A$$

$$c_{12} = a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23},$$

e assim por diante. Podemos verificar que c_{12} corresponde ao desenvolvimento de Laplace

de $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, que é igual a zero porque duas linhas são iguais.

Analogamente, $c_{ii} = \det A$ e $c_{ij} = 0$, $i \neq j$, de forma que

$$A(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{bmatrix} = (\det A)I_3.$$

Dada uma matriz quadrada A de ordem n que possua inversa, temos que

$$\det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}).$$

Além disso, sabemos que $AA^{-1} = I_n$ e que $\det I_n = 1$, de maneira que $(\det A)(\det A^{-1}) = 1$. Podemos então concluir que, se A tem inversa, então

(i) $\det A \neq 0$

(ii) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$,

ou seja, $\det A \neq 0$ é uma condição necessária para que A tenha inversa. Mas essa condição é também suficiente, pois sabemos que $A\bar{A}^T = (\det A)I$, de forma que, se $\det A \neq 0$, então

$$A\left(\frac{1}{\det A}\right)\bar{A}^T = I \text{ e } A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right)\bar{A}^T. \text{ Isso conduz ao seguinte resultado:}$$

Teorema: Uma matriz quadrada A admite inversa se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\text{adj}A).$$

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$. Então $|B| = 99 \neq 0$ e a matriz de cofatores é

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 6 & -9 \\ -7 & 31 & 3 \\ 5 & -8 & 12 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\text{adj}A = \begin{bmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix}$ e

$$A^{-1} = \frac{1}{99} \begin{bmatrix} 21 & -7 & 5 \\ 6 & 31 & -8 \\ -9 & 3 & 12 \end{bmatrix}$$

2.4 Regra de Cramer

Considere um sistema de n equações lineares e n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Seja A a matriz de coeficientes desse sistema e denote por Δ_i o determinante da matriz obtida substituindo a i -ésima coluna de A pela coluna dos termos independentes. A regra de Cramer estabelece a seguinte relação entre determinantes e a solução do sistema:

Teorema: O sistema acima tem uma única solução se, e somente se, $\det A \neq 0$. Nesse caso, a solução única é dada por

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}.$$

É preciso enfatizar que a regra de Cramer só pode ser utilizada para resolver sistemas de equações lineares com o mesmo número de equações e incógnitas e quando $\det A \neq 0$. Na verdade, se $\det A = 0$, o teorema não diz se o sistema tem solução ou não.

Exemplo: Considere o sistema $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ x - 2y - 3z = -1 \end{cases}$. O determinante da matriz de coeficientes

desse sistema é $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 22$. Além disso,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 8 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 66, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -22, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 44.$$

Utilizando a regra de Cramer, obtemos

$$x = \frac{\Delta_1}{\det A} = 3, \quad y = \frac{\Delta_2}{\det A} = -1, \quad z = \frac{\Delta_3}{\det A} = 2.$$

2.5 Exemplos de Economia e Econometria

2.5.1 Economia

Considere uma economia com dois bens em que as funções de demanda e oferta são lineares. Temos então as seguintes relações em um mercado competitivo:

$$Q_d^1 = a_0 + a_1 P_1 + a_2 P_2$$

$$Q_s^1 = b_0 + b_1 P_1 + b_2 P_2$$

$$Q_d^1 - Q_s^1 = 0$$

$$Q_d^2 = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$$

$$Q_s^2 = \beta_0 + \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2$$

$$Q_d^2 - Q_s^2 = 0,$$

onde os a_i 's e b_j 's são parâmetros das funções de demanda e oferta do bem 1 e os α_i 's e β_j 's são parâmetros das funções de demanda e oferta do bem 2, respectivamente.

Podemos substituir a primeira e a segunda equações na terceira, e a quarta e a quinta equações na sexta, para obter o seguinte sistema de equações nos preços P_1 e P_2 :

$$\begin{cases} c_1 P_1 + c_2 P_2 = -c_0 \\ \gamma_1 P_1 + \gamma_2 P_2 = -\gamma_0 \end{cases},$$

onde $c_i \equiv a_i - b_i$, $i = 0, 1, 2$ e $\gamma_i \equiv \alpha_i - \beta_i$, $i = 1, 2, 3$.

Podemos aplicar a regra de Cramer a esse sistema, desde que o determinante da matriz de coeficientes seja diferente de zero. Suponha que $c_1 \gamma_2 \neq c_2 \gamma_1$. Então

$$\det A = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1 \neq 0,$$

e o método pode ser aplicado.

Os outros determinantes de que necessitamos são

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -c_0 & c_2 \\ -\gamma_0 & \gamma_2 \end{vmatrix} = -c_0\gamma_2 + c_2\gamma_0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & -c_0 \\ \gamma_1 & -\gamma_0 \end{vmatrix} = -c_1\gamma_0 + c_0\gamma_1$$

A solução é então dada por:

$$P_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} = \frac{c_2\gamma_0 - c_0\gamma_2}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}, \quad P_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} = \frac{c_0\gamma_1 - c_1\gamma_0}{c_1\gamma_2 - c_2\gamma_1}.$$

Para que os preços sejam positivos, é preciso que os numeradores tenham o mesmo sinal que o denominador, o que introduz novas restrições sobre os parâmetros.

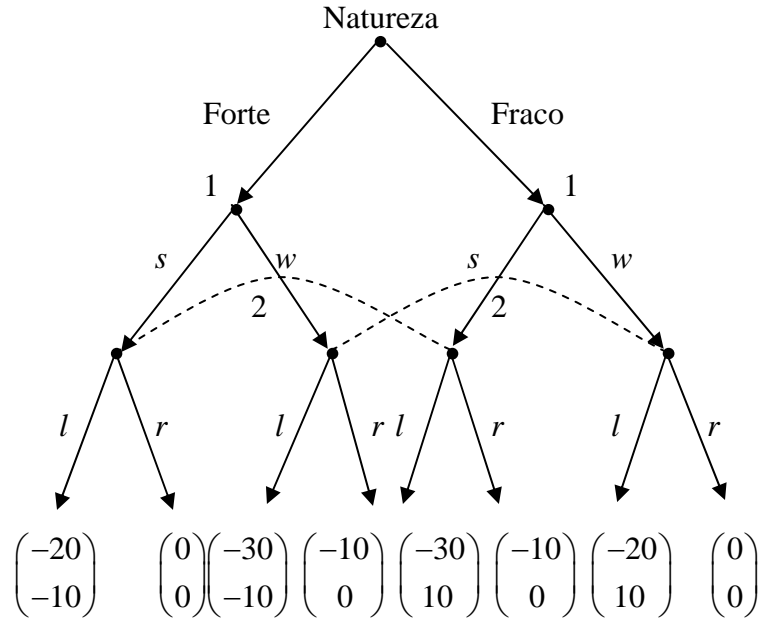
As quantidades de equilíbrio podem ser encontradas por substituição dos preços de equilíbrio nas funções de oferta ou demanda.

Outra aplicação é a modelos de Teoria dos Jogos. O problema mais conhecido em Teoria dos Jogos e o “Dilema dos Prisioneiros”, que pode ser representado pela matriz de *payoffs* abaixo:

	<i>Não confessar</i>	<i>Confessar</i>
<i>Não confessar</i>	-2,-2	-10,-1
<i>Confessar</i>	-1,-10	-5,-5

No jogo acima, “Confessar” (C) é uma estratégia dominante para ambos jogadores e o perfil (C,C) é um equilíbrio de Nash.

O jogo abaixo está na forma extensiva e é conhecido como o Jogo da Cerveja-Quiche (Beer-Quiche):



O jogo se desenvolve como a seguir. O jogador 1 observa um movimento aleatório da natureza que determina o seu tipo: ele é forte (S) com probabilidade 0,9 e fraco (W), com probabilidade 0,1. Após tomar conhecimento do seu tipo, o jogador 1 envia um de dois sinais ao jogador 2: s (“Eu sou forte”) ou w (“Eu sou fraco”). Enviar um sinal verdadeiro não custa nada, mas enviar um sinal falso custa 10 unidades de *payoff*. Após receber o sinal, o jogador 2 decide se luta (l) ou recua (r). Se decidir lutar, ele ganhará 10 unidades de *payoff* se o jogador 1 for fraco e perderá 10 se ele for forte. O jogador 1, por outro lado, perderá 20 unidades de *payoff* se ocorrer a luta (independentemente do seu tipo).

Cada jogador tem 4 estratégias puras. Para o jogador 1, elas são: “sempre s ” (ss), “ s quando S , w quando W ” (sw), “ w quando S , s quando W ” (ws), e “sempre w ” (ww). As estratégias do jogador 2 são: “recuar quando s , lutar quando w ” (rl), “sempre recuar” (rr), “sempre lutar” (ll), e “lutar quando s , recuar quando w ” (lr).

A matriz de *payoffs* é:

	rl	rr	ll	lr
ss	-1,0	-1,0	-21,-8	-21,-8
sw	-2,1	0,0	-20,-8	-18,-9
ws	-28,-9	-10,0	-30,-8	-12,1
ww	-29,-8	-9,0	-29,-8	-9,0

Para entender melhor os *payoffs* da matriz, observe o perfil (ws,rf) . O *payoff* do jogador 1 pode ser recalculado como

$$(0.9)(-30) + (0.1)(-10) = -28,$$

enquanto o *payoff* do jogador 2 é

$$(0.9)(-10) + (0.1)(0) = -9.$$

Os equilíbrios de Nash com estratégias puras são (ss,rf) e (ww,fr) . Agora suponha que estejamos interessados em encontrar os equilíbrios de Nash com estratégias mistas. Sejam as estratégias mistas do jogador 1 representadas pelo vetor $\sigma_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e as do jogador 2, por $\sigma_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4)$.

Observe que $y_3 = 0$ em qualquer equilíbrio de Nash, pois ff é estritamente dominada por rr . Observe também que $x_3 = 0$ em qualquer equilíbrio de Nash, pois ws não é racionalizável.

Queremos determinar as condições sob as quais (ss,sw) pode fazer parte de um equilíbrio de Nash com estratégias mista, isto é, onde $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Sabemos que para isso ser verdade é preciso que $u_1(ss, \sigma_2) = u_1(sw, \sigma_2)$, onde

$$\begin{aligned} u_1(ss, \sigma_2) &= -y_1 - y_2 - 21y_3 - 21y_4 = -(y_1 + y_2) - 21(y_3 + y_4) \\ u_2(sw, \sigma_2) &= -2y_1 + 0y_2 - 20y_3 - 18y_4 = -2y_1 - 20y_3 - 18y_4. \end{aligned}$$

Lembrando que $y_3 = 0$, obtemos a seguinte equação:

$$-(y_1 + y_2) - 21y_4 = -2y_1 - 18y_4 \Rightarrow y_1 - y_2 - 3y_4 = 0.$$

Combinando essa equação com $y_1 + y_2 + y_4 = 1$, obtemos um sistema de equações que pode ser resolvido como a seguir:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{L_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esse sistema tem uma infinidade de soluções. Fazendo $y_4 = \lambda$, obtemos

$$y_1 = \frac{1}{2} + \lambda, \quad y_2 = \frac{1}{2} - 2\lambda.$$

Se $\lambda = 1/10$, por exemplo, então $y_1 = 6/10$ e $y_2 = 3/10$.

2.5.2 Econometria

Suponha que a relação entre a variável dependente e várias variáveis independentes (explicativas) seja a seguinte:

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

A relação acima é chamada de equação de regressão, onde a variável dependente, y , é explicada pelas variáveis x_1, \dots, x_K . O subíndice i indexa as observações, que totalizam n . O termo ε é o erro aleatório. Esse erro surge por diversas razões, sendo a principal o fato de que não é possível captar todas as influências sobre uma determinada variável y . O resultado líquido de todos os fatores omitidos está refletido no erro. Outro elemento capturado pelo erro aleatório são os erros de medição, que estão presentes em qualquer amostra.

Por exemplo, suponha que estejamos interessados em estudar o comportamento da renda dos indivíduos e que tenhamos postulado o seguinte modelo de regressão simples:

$$renda = \beta_0 + \beta_1 \text{educação} + \varepsilon.$$

Esse modelo não leva em consideração que outros fatores além do nível de educação podem afetar a renda do indivíduo, como idade e nível de educação dos pais. Portanto, o erro aleatório ε refletirá a omissão dessas variáveis. Além disso, é bastante provável que a variável educação esteja medida com erro, mesmo porque não há consenso sobre como ela deve ser medida. Isso também é capturado pelo erro aleatório.

A equação de regressão na verdade é um conjunto de equações, uma para cada observação:

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \dots + \beta_K x_{1K} + \varepsilon_1 \\ y_2 &= \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_K x_{2K} + \varepsilon_2 \\ &\text{-----} \\ y_n &= \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \dots + \beta_K x_{nK} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Essas equações podem ser representadas na forma matricial como a seguir:

$$y = X\beta + \varepsilon,$$

onde

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nK} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix}, \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

O objetivos principais de uma análise de regressão são estimar os parâmetros desconhecidos β_i , usar os dados disponíveis para estudar a validade de proposições teóricas e usar o modelo para testar hipóteses e fazer previsões sobre a variável dependente.

Para obter estimativas dos parâmetros, o método mais utilizado é o de mínimos quadrados ordinários. Esse método procura encontrar os coeficientes que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos

$$\sum_{i=1}^n e_i^2 = e^T e,$$

onde $e = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$ é o vetor de resíduos, sendo o resíduo da i -ésima observação definido por

$$e_i = y_i - (x_{i1}b_1 - x_{i2}b_2 - \cdots - x_{iK}b_K) \text{ e } b_i \text{ a estimativa de } \beta_i.$$

A solução do problema de minimização é

$$b = (X^T X)^{-1} X^T y.$$

Podemos então calcular os resíduos como

$$\begin{aligned} e &= y - Xb = y - X(X^T X)^{-1} X^T y \\ &= \left(I - X(X^T X)^{-1} X^T \right) y = My. \end{aligned}$$

A matriz M tem grande importância para a análise de regressão, e apresenta propriedades interessantes. Além de ser simétrica, essa matriz é idempotente, o que significa que $M^2 = M$. De fato,

$$\begin{aligned}
M^2 &= \left[I - X(X^T X)^{-1} X^T \right] \left[I - X(X^T X)^{-1} X^T \right] \\
&= I - X(X^T X)^{-1} X^T - X(X^T X)^{-1} X^T + X(X^T X)^{-1} X^T X(X^T X)^{-1} X^T \\
&= I - 2X(X^T X)^{-1} X^T + X(X^T X)^{-1} I X^T \\
&= I - 2X(X^T X)^{-1} X^T + X(X^T X)^{-1} X^T \\
&= I - X(X^T X)^{-1} X^T = M
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
M^T &= \left[I - X(X^T X)^{-1} X^T \right]^T = I - \left[X(X^T X)^{-1} X^T \right]^T \\
&= I - (X^T)^T \left[(X^T X)^{-1} \right]^T X^T = I - X \left[(X^T X)^T \right]^{-1} X^T \\
&= I - X(X^T X)^{-1} X^T = M.
\end{aligned}$$